Formule du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Motivation Définir les briques de bases de l'algèbre de Boole, la création de circuits. Offrir un formaliste standard pour résoudre de nombreux problèmes.

I. Syntaxe [SCHWARZ]

A. Le langage LP

Définition 1 L'ensemble des variables propositionnelles est un ensemble de symboles $\text{Prop} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$.

Définition 2 L'ensemble des formules de la logique propositionnelle est le langage LP défini inductivement sur l'alphabet $\text{Prop} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ par:

- $\text{Prop} \subseteq \text{LP}$
- si $\varphi \in \text{LP}$ alors $\neg\varphi \in \text{LP}$
- Si φ et $\psi \in \text{LP}$ alors $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{LP}$.

Définition 3 $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ défini un ensemble de connecteur logiques.

B. Représentations

Théorème 4 **Lecture unique d'une formule** Si $\varphi \in \text{LP}$ alors un unique des cas suivant se présente :

- $\varphi \in \text{Prop}$
- il existe une unique paire de formules ψ, ϕ tq $\varphi = (\psi \vee \phi)$
- idem pour $\varphi = (\psi \vee \phi), \varphi = (\psi \rightarrow \phi)$ et $\varphi = (\psi \leftrightarrow \phi)$

Notation 5 En associant une priorité à chaque connecteur on s'épargne des parenthèses. $\neg$ précède $\wedge$ précède $\vee$ précède $\rightarrow$ précède $\leftrightarrow$.

Exemple 6 On écrit donc $(p \vee q) \wedge r \rightarrow t$ au lieu de $(((p \vee q) \wedge r) \rightarrow t)$.

Notation 7 **Différentes représentation d'une formule** sont possibles :

Mot Arbre Circuit Logique

Définition 8 **La taille d'une formule** φ est noté $|\varphi|$ et on l'a définit par induction.

- si $\varphi \in \text{Prop}$, $|\varphi| = 1$
- si $\varphi = \neg\psi$, $|\varphi| = 1 + |\psi|$
- si $\varphi = \psi \bowtie \phi$, pour $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $|\varphi| = 1 + |\psi| + |\phi|$

Exemple 9 Soit $\varphi_1 = (\neg p \wedge q) \rightarrow r$, alors $|\varphi_1| = 6$

Remarque 10 La taille d'une formule est le nombre de noeuds de son arbre.

Définition 11 On définit la hauteur d'une formule φ, notée $h(\varphi)$, par induction sur φ :

- si $\varphi \in \text{Prop}, h(\varphi) = 0$
- si $\varphi = \psi \bowtie \phi$, pour $\bowtie \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $h(\varphi) = \max(h(\psi), h(\phi)) + 1$

Exemple 12 $h(\varphi_1) = 3$

Remarque 13 La hauteur d'une formule est la hauteur de son arbre.

II. Sémantique

A. Valuation

Définition 14 **Une valuation** est une fonction $\nu : \text{Prop} \rightarrow \{0, 1\}$

Définition 15 Dire qu'une formule φ est vraie pour une valuation ν, notée $\nu \vDash \varphi$ se définit par induction sur φ :

- pour tout $p \in \text{Prop}, \nu \vDash p$ ssi $\nu(p) = 1$
- pour toute $\varphi \in \text{LP}, \nu \vDash \neg\varphi$ ssi $\nu \nvDash \varphi$
- pour toute $\varphi, \psi \in \text{LP}, \nu \vDash \varphi \vee \psi$ ssi
  $\nu \vDash \varphi \wedge \psi$ ssi $\nu \vDash \varphi$ et $\nu \vDash \psi$
  $\nu \vDash \varphi \vee \psi$ ssi $\nu \vDash \varphi$ ou $\nu \vDash \psi$
  $\nu \vDash \varphi \rightarrow \psi$ ssi $\nu \vDash \varphi$ alors $\nu \vDash \psi$
  $\nu \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ ssi $\nu \vDash \varphi \rightarrow \psi$ et $\nu \vDash \varphi \leftarrow \psi$

Notation 16 On peut étendre aux formules : $\nu(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \nu \vDash \varphi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Définition 17 Une table de vérité d'une formule donne sa valeur de vérité pour toute valuation sur Prop.

Exemple 18 Pour une implication on a ce tableau :

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

B. Satisfabilité et validité

Définition 19 Une formule φ est satisfiable si et seulement s'il existe une valuation ν tel que $v \vDash \varphi$.

Définition 20 **Modèle d'une formule.** Si $\nu \vDash \varphi$, alors νest un modèle de φ. On note $\mathrm{Mod}(\varphi)$ l'ensemble des modèles de φ.

Définition 21 **Une formule est valide** , aussi nommée une tautologie, noté $\vDash \varphi$ si toute valueation est un modèle de φ.

Propriété 22 **Le tiers exclu** est une tautologie: $\vDash \varphi \vee \neg\varphi (\forall \varphi \in \mathrm{LP})$.

Propriété 23 Une formule est valide ssi $\neg\varphi$ est insatisfiable.

Définition 24 **Equisatisfabilité.** Deux formules φ et ψ sont dîtes équisatisfiables si elles sont toutes les deux satisfiables.

C. Equivalence de formules

Définition 25 Deux formules φ et ψ sont équivalentes, noté $\varphi \equiv \psi$ si $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$?

Remaque 26 Deux formules équivalentes sont équisatisfiables. La réciproque n'est pas vraie en général.

Propriété 27 **Les lois de De Morgan** Pour toutes $\varphi, \psi \in \mathrm{LP}$:

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \wedge \psi$

Propriété 28 **Distributivité** Pour toutes $\varphi, \psi, \phi \in \mathrm{LP}$:

- $(\varphi \vee \psi) \wedge \phi = (\varphi \wedge \phi) \vee (\varphi \wedge \phi)$
- $(\varphi \wedge \psi) \vee \phi = (\varphi \vee \phi) \wedge (\varphi \vee \phi)$

Propriété 29 **Associativité et Commutativité** Pour toutes $\varphi, \psi, \phi \in \mathrm{LP}$,

- $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
- $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
- $(\varphi \vee \psi) \vee \phi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \phi)$
- $(\varphi \wedge \psi) \wedge \phi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \phi)$

Propriété 30 Pour toute

- $\varphi \in \mathrm{LP}$, $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- $\varphi, \psi \in \mathrm{LP}, \varphi \equiv$ ssi $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$

Propriété 31 Pour toutes $\varphi, \psi \in \mathrm{LP}, \varphi \equiv \psi$ ssi $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$

III. Formes normales, problème SAT

A. Systèmes complets de connecteurs

Définition 32 **Système complete de connecteurs.** Un systèmes (ou ensemble) de connecteurs logiques est dit complet si pour toute formule $\varphi \in \mathrm{LP}$, il existe ψ une formule qui lui est équivalente, et qui n'utilise que les connecteurs de ce système.

Propriété 33

- $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \wedge, \vee, \to\}, \{\uparrow\}$, où $\varphi \uparrow \psi = \neg(\varphi \wedge \psi)$ sont complets.
- $\{\neg\}$ n'est pas complet.

B. Formes Normales

Définition 34 Un littéral est une variable propositionnelle de Prop ou la négation d'une variable propositionnelle.

Définition 35 Un littéral est dit positif s'il est une variable propositionnelle, négatif s'il en est la négation.

Définition 36 **Une clause disjonctive** (resp. conjonctive) est une disjonction (resp. conjonction) de littéraux. $C = \bigvee_{i=1}^{n} l_i$.

Définition 37 **Une k-clause** est une clause contenant exactemetn k littéraux.

Définition 38 **FNC FND.** Une formule est sous Forme Normale Conjonctive (FNC) si elle est une conjonction de clauses disjonctives. Une formule est sous Forme Normale Disjonctive (FND) si elle est une disjonction de clause conjonctives.

Propriété 39 Pour toute formule φ, il existe φ' sous FNC et φ'' sous FND tel que $p \equiv \varphi' \equiv \varphi''$.

Algorithme 40 **(Naïf)**

- « Descendre » les négations avec De Morgan
- Eliminer les doubles négations (FNN)
- Appliquer les règles de distributivité.

Propriété 41 **Borne Exponentielle** Soient $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in$ Prop. La famille de formules $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\varphi_n = \bigvee_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$ ne possèdent que des formules sous FNC équivalentes qui sont de taille exponentielle en $|\varphi_n|$.

Théorème 42 **Transformation de tseitin** Pour toute formule φ, il existe $T(\varphi)$ sous FNC, avec des 3-clauses, de taille $\mathcal{O}(|\varphi|)$ et tel que φ et $T(\varphi)$ sont équisatisfiables. DEV

C. Problème SAT

Définition 43 **Le problème SAT** est un problème de décision. En entrée une formule $\varphi \in$ LP. En sortie oui ssi φ est satisfiable et non sinon.

Exemple 44 **Une configuration de Sudoku** se traduit par une formule φ sous FNC qui englobe également les règles du jeu. Remplir les cases manquantes de la grille revient à trouver un modèle de phi.

Exemple 45 **La k-coloration d'un graphe** peut être traduite en une formule imposant une couleur unique par noeud et interdisant l'adjacence de deux noeuds de même couleur. Une k-coloration se traduit en un modèle de la formule.

Propriété 46 **SAT est indécidable.**

Algorithme 47 **(SAT Naïf** Remplir la table de vérité jusqu'à trouver un modèle (sinon la formule est insatisfiable)

Algorithme 48 **Davis Putnam Logemann Loveland** Pour tout $\varphi \in$ LP(sous FNC), l'algorithme DPLL optimise sa recherche de modèle pour φ en utilisant du retour sur trace en cas de conflit. DEV

Propriété 49 Si φ est sous FND, la satisfiabilité se vérifie en $\mathcal{O}(\varphi)$. Donc FND SAT est dans P.

DEV **Propriété 50** **Cook Levin. SAT est NP-complet.**

Propriété 51 **FNC SAT est NP-complet**

Propriété 52 **3-SAT** La restriction de SAT aux formules sous FNC avec uniquement des 3-clauses est aussi NP-complet.

DEV **Propriété 53** **2-SAT** La restriction de SAT aux formules sous FNC avec uniquement des 2-clauses est en $\mathcal{O}(\varphi)$. (Algorithme de Tarjan ou Kosaraju).

Définition 54 **Une clause de Horn** est une clause avec au plus un littéral positif.

Propriété 55 **HornSAT** La restriction de SAT aux formules sous FNC avec uniquement des clauses de Horn est en $\mathcal{O}(|\varphi|)$.

if font != « «

Formule du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

I. Syntaxe [SCHWARZ]

A. Le langage LP

1 Def

2 Def

3 Def

B. Représentations

4 Thm Lecture unique d'une formule

5 Not

6 Ex

7 Not Différentes représentation d'une formule

8 Def La taille d'une formule

9 Ex

10 Rem

11 Def

12 Ex

13 Rem

II. Sémantique

A. Valuation

14 Def Une valuation

15 Def

16 Not

17 Def

18 Ex

B. Satisfabilité et validité

19 Def

20 Def Modèle d'une formule.

21 Def Une formule est valide

22 Prop Le tiers exclu

23 Prop

24 Def Equisatisfabilité.

C. Equivalence de formules

25 Def

26 Remaque

27 Prop Les lois de De Morgan

28 Prop Distributivité

29 Prop Associativité et Commutativité

30 Prop

31 Prop

III. Formes normales, problème SAT

A. Systèmes complets de connecteurs

32 Def Système complete de connecteurs.

33 Prop

B. Formes Normales

34 Def

35 Def

36 Def Une clause disjonctive

37 Def Une k-clause

38 Def FNC FND.

39 Prop

40 Algo (Naïf)

41 Prop Borne Exponentielle

42 Thm Transformation de tseitin

C. Problème SAT

43 Def Le problème SAT

44 Ex Une configuration de Sudoku

45 Ex La k-coloration d'un graphe

46 Prop SAT est indécidable.

47 Algo (SAT Naïf

48 Algo Davis Putnam Logemann Loveland

49 Prop

50 Prop Cook Levin. SAT est NP-complet.

51 Prop FNC SAT est NP-complet

52 Prop 3-SAT

53 Prop 2-SAT

54 Def Une clause de Horn

55 Prop HornSAT

Bibliographie

[SCHWARZ] P. l. Barbenchon & S. Pinchinat & F. Schwarzentruber, *Logique: Fondements et application.*